

|                                |                    |                                 |
|--------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| Corso di Laurea in Informatica | Analisi Matematica | codice 218284<br>10 luglio 2025 |
|--------------------------------|--------------------|---------------------------------|

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

|    |   |
|----|---|
| 1  | d |
| 2  | b |
| 3  | c |
| 4  | c |
| 5  | d |
| 6  | b |
| 7  | a |
| 8  | d |
| 9  | c |
| 10 | d |

1. La funzione  $f : (0, + \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{\arctan x}{\log(1 + x)}$
- (a) ha sia massimo che minimo

(b) non è limitata

(c) è limitata inferiormente ma non superiormente

► (d) è limitata ma non ha minimo

*Soluzione:*

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\log(1+x)}$$

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

La funzione è continua in  $(0, +\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0$$

Osserviamo ora che  $\log(1+x) > 0 \quad \forall x > 0$   
 e che  $\operatorname{arctg} x > 0 \quad \forall x > 0$ , quindi  $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$ .  
 Per il teorema di Weierstrass generalizzato  $f$  è limitata e non ha minimo.

2. La funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

- (a) ha minimo ma non ha massimo  
 (c) ha massimo ma non ha minimo

- (b) non ha né massimo né minimo  
 (d) ha sia massimo che minimo

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  per gerarchia di infiniti

quindi  $f$  non ha massimo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{e^x} + o(x) - \cancel{1}}{x} = 1$$

quindi  $f$  è continua in  $x=0$ . Poiché  $f$  è continua

anche in ogni punto  $x \neq 0$ ,  $f$  è continua in  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty} - 1}{-\infty} = \frac{0 - 1}{-\infty} = 0.$$

Osserviamo ora che, se  $x > 0$ ,  $e^x - 1 > 0$ , quindi

$$f(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

Se invece  $x < 0$ ,  $e^x - 1 < 0$ , quindi  $f(x) > 0, \forall x < 0$ .

Poiché  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Per il teorema di Weierstrass generalizzato

$f$  non ha minimo.

3. La funzione  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $F(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{t}(t-2) dt$

(a) è convessa

(b) ha 3 punti di flesso

► (c) ha 2 punti di flesso

(d) è concava

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{t-2} dt$$

Utilizziamo la formula di derivazione per integrali  
con estremi variabili ottenendo

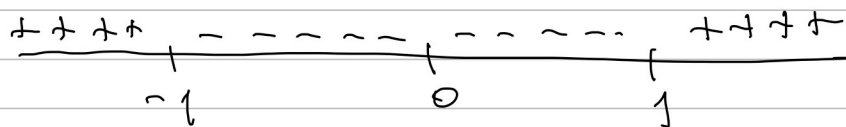
$$F'(x) = 2x \sqrt{x^2-2} (x^2-2) = 2x|x|(x^2-2) =$$

$$= \begin{cases} 2x^2(x^2-2) = 2x^4 - 4x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -2x^2(x^2-2) = -2x^4 + 4x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$F''(x) = \begin{cases} 8x^3 - 8x = 8x(x^2-1) & \text{se } x \geq 0 \\ -8x^3 + 8x = -8x(x^2-1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Poiché  $\lim_{x \rightarrow 0} F''(x) = 0$ , otteniamo che  $F''(0) = 0$ .

Dato che  $(x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$  oppure  $x \leq -1$   
il segno di  $F''(x)$  è il seguente



Ne segue che  $x = 1$  e  $x = -1$  sono punti  
di flesso per  $F$ .

4.  $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\tan(3x)}{\cos(3x)} dx =$

(a)  $\frac{\log 2}{2}$

(b)  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

► (c)  $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

(d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soluzione:

$$\int \frac{\tan(3x)}{\cos(3x)} dx = \int \frac{\sin(3x)}{\cos^2(3x)} dx$$

eseguiremo la sostituzione  $\cos(3x) = t$ ,  $\frac{dt}{dx} = -3 \sin(3x)$

$$\sin(3x) dx = -\frac{dt}{3}$$

$$\int \frac{\sin(3x)}{\cos^2(3x)} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3} \left( -\frac{1}{t} \right) + C = \frac{1}{3t} + C = \frac{1}{3 \cos(3x)} + C$$

Quindi  $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\tan(3x)}{\cos(3x)} dx = \left[ \frac{1}{3 \cos(3x)} \right]_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\cos 0} \right) =$

$$= \frac{1}{3} (\sqrt{2} - 1)$$

5.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \pi)}{\cos^3 x} dx$

(a) converge

(b) diverge positivamente (c) non esiste

► (d) diverge negativamente

Soluzione:

Osserviamo che

$$\cos(x+\pi) = \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi = -\cos x$$

$$\text{Quindi} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\cos x}{\cos^3 x} dx = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

La funzione integranda è pari, quindi consideriamo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pi/2^-} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[ \tan x \right]_0^{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan \varepsilon = +\infty$$

$$\text{Quindi} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\infty$$

$$\text{Per simmetria anche} \quad \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = -\infty$$

L'integrale quindi diverge negativamente.

6.  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sin x - |x|} dx$

(a) diverge positivamente (b) converge

(c) non esiste

(d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo  $f(x) = e^{\sin x - |x|}$ . Osserviamo che  $f(x) > 0$  quindi possiamo applicare il criterio del confronto.

$$0 < e^{\sin x - |x|} = e^{\sin x} \cdot e^{-|x|} \leq e^1 e^{-|x|} = e \cdot e^{-|x|}.$$

Poniamo quindi  $g(x) = e \cdot e^{-|x|}$  e osserviamo che  $g$  è pari.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-|x|} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{-x} dx = \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} -e^{-M} + e^0 = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

quindi  $\int_0^{+\infty} e^{-|x|} dx$  converge e, per simmetria, converge anche

$\int_{-\infty}^0 e^{-|x|} dx$ . Quindi  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$  converge e, per il criterio del confronto, converge anche  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ .

7.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(2n)!}} =$

► (a)  $\frac{e^2}{4}$

(b)  $+\infty$

(c) 0

(d)  $\frac{e}{2}$

Soluzione:

Poniamo  $a_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!}$  e ricordiamo che se  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  allora anche  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

(la successione  $a_n$  è a termini positivi).

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n}} = \frac{(n+1)^{2n}}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^{2n}} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{n+1}{2(2n+1)} \end{aligned}$$

Poiché  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4}$

otteniamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^2}{4}$ , quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{e^2}{4}.$$

8. La serie  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{2n-1}{2n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right)$

- (a) diverge negativamente                      (b) diverge positivamente  
 (c) converge ma non converge assolutamente      ► (d) converge assolutamente

Soluzione:

Poniamo  $a_n = \frac{2n-1}{2n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}}$  e osserviamo che

$$a_n = 1 - \frac{1}{2n} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \left(-\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2n}} - \cancel{1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \left(-\frac{1}{8} + o(1)\right)$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Taylor

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + o(t^2) \quad \text{con } \alpha = \frac{1}{2}, t = -\frac{1}{n}$$

Scegliamo ora  $b_n = \frac{1}{n^2}$  e otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{8} \quad \text{quindi, per il criterio del}$$

confronto asintotico,  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  converge, quindi

$\sum_{n \geq 1} a_n$  converge assolutamente.

9.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{x \arctan x}{x^4 + y^2} =$

- (a)  $+\infty$                       (b)  $\frac{\pi}{2}$                       ► (c) non esiste                      (d) 0

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{x \arctan x}{x^4 + y^2}$$

Consideriamo la restrizione di  $f$  all'asse  $y$

$$h(y) = f(0,y) = \frac{0 \cdot \arctan 0}{0 + y^2} = 0 \quad \forall y \neq 0$$

quindi  $\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 0$

Consideriamo ora la restrizione di  $f$  all'asse  $x$

$$g(x) = f(x,0) = \frac{x \arctan x}{x^4 + 0} \quad \text{ove } x \neq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (x + o(x^2))}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + o(x))}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(x)}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

quindi non esiste  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ .

10. La funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x,y) = xy(2x^2 + 3y^2 - 9)$

- (a) è limitata superiormente ma non inferiormente      (b) è limitata inferiormente ma non superiormente  
(c) è limitata      ► (d) non è né superiormente né inferiormente limitata

Soluzione:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy(2x^2 + 3y^2 - 9)$$

Consideriamo la curva  $\gamma(t) = (t, 1)$ . La restrizione di  $f$  su  $\gamma$  è la funzione

$$g(t) = f(t, 1) = t(2t^2 + 3 - 9) = t(2t^2 - 6)$$

Dato che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\infty$ , otteniamo che

$f$  non è né superiormente né inferiormente limitata.

|                                |                    |                                 |
|--------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| Corso di Laurea in Informatica | Analisi Matematica | codice 161559<br>10 luglio 2025 |
|--------------------------------|--------------------|---------------------------------|

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

|    |   |
|----|---|
| 1  | a |
| 2  | d |
| 3  | a |
| 4  | b |
| 5  | b |
| 6  | c |
| 7  | a |
| 8  | d |
| 9  | c |
| 10 | b |

1. La funzione  $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{\arctan x}{\log(1+x)}$ 

► (a) è limitata ma non ha minimo

(b) è limitata inferiormente ma non superiormente

(c) non è limitata

(d) ha sia massimo che minimo
- Soluzione:

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\log(1+x)}$$

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

La funzione è continua in  $(0, +\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0$$

Osserviamo ora che  $\log(1+x) > 0 \quad \forall x > 0$   
e che  $\operatorname{arctg} x > 0 \quad \forall x > 0$ , quindi  $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$ .  
Per il teorema di Weierstrass generalizzato  $f$  è limitata e non ha minimo.

2. Nel punto  $x = 0$  la funzione  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(a) è continua ma non derivabile

(b) è derivabile

(c) è derivabile a sinistra ma non a destra

► (d) non è continua

Soluzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^3}(-\frac{1}{6} + o(x))}{\cancel{x^3}} = -\frac{1}{6}.$$

Poiché  $f(0) = 0 \neq -\frac{1}{6}$ ,  $f$  non è continua in  $x = 0$ .

3. La funzione  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $F(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{t}(t-2) dt$

- (a) ha 2 punti di flesso (b) ha 3 punti di flesso  
(c) è convessa (d) è concava

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{t}(t-2) dt$$

Utilizziamo la formula di derivazione per integrali  
con estremi variabili ottenendo

$$F'(x) = 2x \sqrt{x^2} (x^2 - 2) = 2x |x| (x^2 - 2) =$$

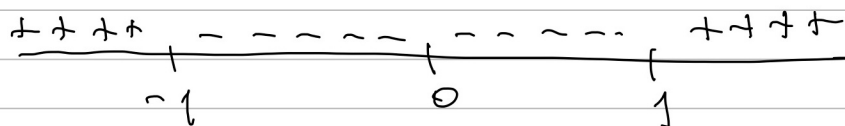
$$= \begin{cases} 2x^2(x^2 - 2) = 2x^4 - 4x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -2x^2(x^2 - 2) = -2x^4 + 4x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$F''(x) = \begin{cases} 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1) & \text{se } x \geq 0 \\ -8x^3 + 8x = -8x(x^2 - 1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Poiché  $\lim_{x \rightarrow 0} F''(x) = 0$ , otteniamo che  $F''(0) = 0$ .

Dato che  $(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$  oppure  $x < -1$

il segno di  $F''(x)$  è il seguente



Ne segue che  $x = 1$  e  $x = -1$  sono punti  
di flesso per  $F$ .

4.  $\int_0^{\pi/6} \tan(2x) dx =$

(a)  $\sqrt{3}$

► (b)  $\frac{\log 2}{2}$

(c)  $\frac{1}{2}$

(d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soluzione:

$$\int \tan(2x) dx = \int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} dx$$

sostituzione  $\cos(2x) = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -2 \sin(2x)$

$$\Rightarrow \sin(2x) dx = -\frac{dt}{2}$$

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \log|t| + C = -\frac{1}{2} \log|\cos(2x)| + C$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\pi/6} \tan(2x) dx &= -\frac{1}{2} \left[ \log|\cos(2x)| \right]_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2} \left( \log\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) - \log(\cos 0) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{2} - \log 1 \right) = -\frac{1}{2} (-\log 2 - 0) = \frac{\log 2}{2} \end{aligned}$$

5.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx$

(a) diverge positivamente ► (b) diverge negativamente (c) non esiste

(d) converge

Soluzione:

Osserviamo che

$$\cos(x+\pi) = \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi = -\cos x$$

$$\text{Quindi} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\cos x}{\cos^3 x} dx = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

La funzione integranda è pari, quindi consideriamo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pi/2^-} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[ \tan x \right]_0^{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan \varepsilon = +\infty$$

$$\text{Quindi} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\infty$$

$$\text{Per simmetria anche} \quad \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = -\infty$$

L'integrale quindi diverge negativamente.

6. La funzione  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{(e^t - 1)(t^2 + 1)}$

- (a) ha un asintoto obliquo                      (b) ha massimo  
► (c) ha un asintoto verticale e uno orizzontale                      (d) ha minimo

Soluzione:

$$F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x) = \int_1^x \frac{dt}{(e^t - 1)(t^2 + 1)}$$

La funzione integranda è definita e positiva  $\forall t > 0$ , quindi  $F$  è definita  $\forall x > 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \int_1^0 \frac{dt}{(e^t - 1)(t^2 + 1)} = - \int_0^1 \frac{dt}{(e^t - 1)(t^2 + 1)}$$

per  $t \rightarrow 0$   $e^t - 1 = 1 + t + o(t) - 1 = t(1 + o(1))$  quindi

$$f(t) = \frac{1}{(e^t - 1)(t^2 + 1)} = \frac{1}{t} \frac{1}{(1 + o(1))(t^2 + 1)}$$

scegliendo  $g(t) = \frac{1}{t}$  otteniamo che  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$

Dato che  $\int_0^1 \frac{1}{t} dt = +\infty$ , dal criterio del confronto asintotico

abbiamo che  $\int_0^1 f(t) dt = +\infty$ , quindi  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\infty$ .

$F$  ha quindi un'asintoto verticale.

Osserviamo ora che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} f(t) dt$$

Dato che  $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{(e-1)(t^2+1)} \leq \frac{1}{e-1} \cdot \frac{1}{t^2}$

scegliendo  $g(t) = \frac{1}{e-1} \cdot \frac{1}{t^2}$  e applicando il criterio del confronto

abbiamo che  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge, dato che  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e-1} \cdot \frac{1}{t^2} dt$  converge.

Quindi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  è finito e  $F$  ha un'asintoto orizzontale.

7.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(2n)!}} =$

► (a)  $\frac{e^2}{4}$

(b)  $\frac{e}{2}$

(c) 0

(d)  $+\infty$

Soluzione:

Poniamo  $a_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!}$  e ricordiamo che se  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  allora anche  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

(la successione  $a_n$  è a termini positivi).

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n}} = \frac{(n+1)^{2n} (n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{1}{n^{2n}} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \frac{n+1}{2(2n+1)} \end{aligned}$$

Poiché  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4}$

otteniamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^2}{4}$ , quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{e^2}{4}.$$

8. La serie  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{2n-1}{2n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right)$

- (a) diverge negativamente                      (b) diverge positivamente  
 (c) converge ma non converge assolutamente      ► (d) converge assolutamente

Soluzione:

Poniamo  $a_n = \frac{2n-1}{2n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}}$  e osserviamo che

$$a_n = 1 - \frac{1}{2n} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \left(-\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2n}} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{8} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \left(-\frac{1}{8} + o(1)\right)$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Taylor

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + o(t^2) \quad \text{con } \alpha = \frac{1}{2}, t = -\frac{1}{n}$$

Scegliamo ora  $b_n = \frac{1}{n^2}$  e otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{8} \quad \text{quindi, per il criterio del}$$

confronto asintotico,  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  converge, quindi

$\sum_{n \geq 1} a_n$  converge assolutamente.

9.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{x \arctan x}{x^4 + y^2} =$

(a) 0

(b)  $+\infty$

► (c) non esiste

(d)  $\frac{\pi}{2}$

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{x \arctan x}{x^4 + y^2}$$

Consideriamo la restrizione di  $f$  all'asse  $y$

$$h(y) = f(0,y) = \frac{0 \cdot \arctan 0}{0 + y^2} = 0 \quad \forall y \neq 0$$

quindi  $\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 0$

Consideriamo ora la restrizione di  $f$  all'asse  $x$

$$g(x) = f(x,0) = \frac{x \arctan x}{x^4 + 0} \quad \text{ove } x \neq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (x + o(x^2))}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + o(x))}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(x)}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

quindi non esiste  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ .

10. La funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x,y) = xy^2 - yx^2$

- (a) è limitata inferiormente ma non superiormente    ►    (b) non è né superiormente né inferiormente limitata  
(c) è limitata superiormente ma non inferiormente    (d) è limitata

Soluzione:

$$f(x,y) = xy^2 - yx^2$$

Consideriamo la restrizione alla retta  $y=2x$

$$g(x) = f(x, 2x) = x \cdot 4x^2 - 2x \cdot x^2 = 4x^3 - 2x^3 = 2x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

quindi  $f$  non è né superiormente né inferiormente limitata.

|                                |                    |                                 |
|--------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| Corso di Laurea in Informatica | Analisi Matematica | codice 166352<br>10 luglio 2025 |
|--------------------------------|--------------------|---------------------------------|

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

|    |   |
|----|---|
| 1  | c |
| 2  | d |
| 3  | a |
| 4  | a |
| 5  | c |
| 6  | a |
| 7  | d |
| 8  | c |
| 9  | c |
| 10 | b |

1. La funzione  $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{\arctan x}{\log(1+x)}$ 

(a) ha sia massimo che minimo

(b) non è limitata

► (c) è limitata ma non ha minimo

(d) è limitata inferiormente ma non superiormente
- Soluzione:

$$f(x) = \frac{\arctg x}{\log(1+x)}$$

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

La funzione è continua in  $(0, +\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0$$

Osserviamo ora che  $\log(1+x) > 0 \quad \forall x > 0$   
 e che  $\arctg x > 0 \quad \forall x > 0$ , quindi  $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$ .  
 Per il teorema di Weierstrass generalizzato  $f$  è limitata e non ha minimo.

2. La funzione  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

(a) ha un asintoto verticale

(b) non ha asintoti di nessun tipo

(c) ha un asintoto orizzontale

► (d) ha un asintoto obliquo

Soluzione:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \left( \text{sostituzione } t = \frac{1}{x} \right. \\ &\quad \left. x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow 0^+ \right) \end{aligned}$$

$$(m=1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin \frac{1}{x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( x \sin \frac{1}{x} - 1 \right)$$

utilizziamo lo sviluppo di Taylor

$$\sin t = t + o(t^2) \quad \text{con } t = \frac{1}{x}. \quad \text{Quindi}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( x \sin \frac{1}{x} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( x \left( \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \cancel{1} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \cancel{1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} o(1) = 0 \end{aligned}$$

$$(q=0) \Rightarrow y = mx + q = x \quad \text{è asintoto obliquo}$$

per  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

3. La funzione  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $F(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{t}(t-2) dt$

- (a) ha 2 punti di flesso
- (b) è convessa
- (c) è concava
- (d) ha 3 punti di flesso

Soluzione:

$$F(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{t-2} dt$$

Utilizziamo la formula di derivazione per integrali con estremi variabili ottenendo

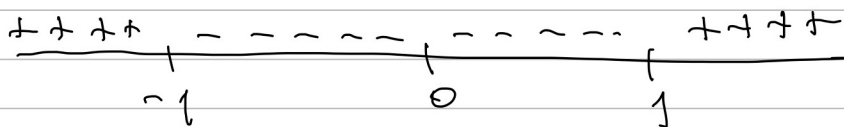
$$F'(x) = 2x \sqrt{x^2-2} (x^2-2) = 2x|x|(x^2-2) =$$

$$= \begin{cases} 2x^2(x^2-2) = 2x^4 - 4x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -2x^2(x^2-2) = -2x^4 + 4x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$F''(x) = \begin{cases} 8x^3 - 8x = 8x(x^2-1) & \text{se } x \geq 0 \\ -8x^3 + 8x = -8x(x^2-1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Poiché  $\lim_{x \rightarrow 0} F''(x) = 0$ , otteniamo che  $F''(0) = 0$ .

Dato che  $(x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$  oppure  $x \leq -1$   
il segno di  $F''(x)$  è il seguente



Ne segue che  $x = 1$  e  $x = -1$  sono punti di flesso per  $F$ .

4. La funzione  $F(x) = \begin{cases} 2 + \int_0^x t \cos t \, dt & \text{se } x > -\pi \\ \pi(x + \pi) & \text{se } x \leq -\pi \end{cases}$

- (a) è derivabile in  $\mathbb{R}$  (b) è continua ma non derivabile in  $\mathbb{R}$   
 (c) è derivabile in  $\mathbb{R}$  ma non è continua in  $(-\infty, -\pi)$  (d) non è continua in  $\mathbb{R}$

Soluzione:

La funzione  $F$  è ovviamente derivabile  $\forall x < -\pi$ .

$F$  è derivabile anche per  $x > -\pi$  in quanto primitiva di una funzione continua.

Verifichiamo la continuità in  $x = -\pi$ .

$F$  è banalmente continua a sinistra e  $F(-\pi) = \pi(-\pi + \pi) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} F(x) = 2 + \int_0^{-\pi} t \cos t \, dt = 2 - \int_{-\pi}^0 t \cos t \, dt.$$

Calcoliamo l'integrale per parti, integrando  $\cos t$  e derivando  $t$

$$\int t \cos t \, dt = t \sin t - \int 1 \cdot \sin t \, dt = t \sin t + \cos t + c$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^0 t \cos t \, dt = [t \sin t + \cos t]_{-\pi}^0 = 0 \cdot \sin 0 + \cos 0 - (-\pi \sin(-\pi) + \cos(-\pi)) =$$

$$= 1 - (-1) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\pi^+} F(x) = 2 - 2 = 0 = F(-\pi)$$

quindi  $F$  è continua anche a destra in  $x = -\pi$ .

Data la continuità di  $F$  possiamo tentare di verificare la derivabilità facendo il limite della derivata.

$$\text{Se } x < -\pi \Rightarrow F'(x) = \pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\pi^-} F'(x) = \pi.$$

$$\text{Se } x > -\pi \Rightarrow F'(x) = x \cos x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\pi^+} F'(x) = -\pi \cos(-\pi) = -\pi \cdot (-1) = \pi$$

quindi  $F'_-(-\pi) = F'_+(-\pi) = \pi$  e la  $F$  è derivabile in  $x = -\pi$   
 quindi  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

5.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \pi)}{\cos^3 x} \, dx$

- (a) diverge positivamente (b) non esiste ► (c) diverge negativamente (d) converge

Soluzione:

Osserviamo che

$$\cos(x+\pi) = \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi = -\cos x$$

$$\text{Quindi} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\cos x}{\cos^3 x} dx = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

La funzione integranda è pari, quindi consideriamo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pi/2^-} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[ \tan x \right]_0^{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan \varepsilon = +\infty$$

$$\text{Quindi} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\infty$$

$$\text{Per simmetria anche} \quad \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = -\infty$$

L'integrale quindi diverge negativamente.

6. Sia  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{(e^{x^2} + 1)(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sin x)}{(e^{x^2} - 1)(2 + \sin x)(1 + x^2)}$ . Allora

► (a)  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$

(b)  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = +\infty$

(c)  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  non esiste

(d)  $\int_0^1 f(x) dx$  converge

Soluzione:

$$f(x) = \frac{(e^{x^2} + 1)(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sin x)}{(e^{x^2} - 1)(1 + \sin x)(1 + x^2)} \quad x \in (0, +\infty).$$

osserviamo che  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$  quindi  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  esiste sicuramente (finito o infinito).

Per  $x \rightarrow 0^+$   $f(x) = \frac{(e^{x^2} + 1)(1 + \sin x)}{(e^{x^2} - 1)(1 + x^2)} \cdot \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}(x^{1/2})^2 + o((x^{1/2})^3))}{(1 + x^2 + o(x^2)) - 1} =$

$$= (1 + o(1)) \cdot \frac{\frac{1}{2}x + o(x^{3/2})}{x^2 + o(x^2)} = (1 + o(1)) \cdot \frac{\frac{1}{2} + o(x^{1/2})}{x(1 + o(1))} =$$

$$= (1 + o(1)) \cdot \frac{\frac{1}{2} + o(x^{1/2})}{1 + o(1)} \cdot \frac{1}{x} =$$

Utilizziamo il confronto asintotico con  $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + o(1)) \cdot \frac{\frac{1}{2} + o(x^{1/2})}{1 + o(1)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

Dato che  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$  segue che  $\int_0^1 f(x) dx = +\infty$

Non serve quindi controllare  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  (dato che  $f(x) \geq 0$ )

per concludere che

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty.$$

7.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(2n)!}} =$

(a)  $+\infty$

(b) 0

(c)  $\frac{e}{2}$

► (d)  $\frac{e^2}{4}$

Soluzione:

Poniamo  $a_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!}$  e ricordiamo che se  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  allora anche  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

(la successione  $a_n$  è a termini positivi).

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n}} = \frac{(n+1)^{2n}}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^{2n}} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{n+1}{2(2n+1)} \end{aligned}$$

Poiché  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4}$

otteniamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^2}{4}$ , quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{e^2}{4}.$$

8. La serie  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{2n-1}{2n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right)$

- (a) diverge positivamente
- (b) converge ma non converge assolutamente
- (c) converge assolutamente
- (d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo  $a_n = \frac{2n-1}{2n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}}$  e osserviamo che

$$a_n = 1 - \frac{1}{2n} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \left(-\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2n}} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{8} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \left(-\frac{1}{8} + o(1)\right)$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Taylor

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + o(t^2) \quad \text{con } \alpha = \frac{1}{2}, t = -\frac{1}{n}$$

Scegliamo ora  $b_n = \frac{1}{n^2}$  e otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{8} \quad \text{quindi, per il criterio del}$$

confronto asintotico,  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  converge, quindi

$\sum_{n \geq 1} a_n$  converge assolutamente.

9.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{x \arctan x}{x^4 + y^2} =$

(a)  $\frac{\pi}{2}$

(b)  $+\infty$

► (c) non esiste

(d) 0

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{x \arctan x}{x^4 + y^2}$$

Consideriamo la restrizione di  $f$  all'asse  $y$

$$h(y) = f(0,y) = \frac{0 \cdot \arctan 0}{0 + y^2} = 0 \quad \forall y \neq 0$$

quindi  $\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 0$

Consideriamo ora la restrizione di  $f$  all'asse  $x$

$$g(x) = f(x,0) = \frac{x \arctan x}{x^4 + 0} \quad \text{ove } x \neq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (x + o(x^2))}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + o(x))}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(x)}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

quindi non esiste  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ .

10. La funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x,y) = x^6 + e^{|y-3|} - 1$

- (a) è limitata inferiormente ma non ha minimo      ► (b) ha minimo ma non ha massimo  
(c) non ha né massimo né minimo      (d) ha sia massimo che minimo

Soluzione:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = x^6 + e^{|y-3|} - 1.$$

Dato che  $x^6 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  e  $e^{|y-3|} \geq 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$   
 risulta che  $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Osservando che  $f(0, 3) = 0^6 + e^{|3-3|} - 1 = 0$   
 otteniamo che  $f$  ha minimo.

Consideriamo ora la restrizione all'asse  $x$

$$f(x, 0) = x^6 + e^3 - 1.$$

Osserviamo che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = +\infty$

quindi  $f$  non ha massimo.

|                                |                    |                                 |
|--------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| Corso di Laurea in Informatica | Analisi Matematica | codice 801224<br>10 luglio 2025 |
|--------------------------------|--------------------|---------------------------------|

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

|    |   |
|----|---|
| 1  | a |
| 2  | b |
| 3  | b |
| 4  | a |
| 5  | d |
| 6  | b |
| 7  | d |
| 8  | c |
| 9  | c |
| 10 | a |

1. La funzione  $f : (0, + \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{\arctan x}{\log(1 + x)}$ 

► (a) è limitata ma non ha minimo

(b) non è limitata

(c) ha sia massimo che minimo

(d) è limitata inferiormente ma non superiormente
- Soluzione:

$$f(x) = \frac{\arctg x}{\log(1+x)}$$

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

La funzione è continua in  $(0, +\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0$$

Osserviamo ora che  $\log(1+x) > 0 \quad \forall x > 0$   
 e che  $\arctg x > 0 \quad \forall x > 0$ , quindi  $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$ .  
 Per il teorema di Weierstrass generalizzato  $f$  è limitata e non ha minimo.

2. La funzione  $f(x) = \frac{\sin x \cos(x^2)}{x^2}$ , nel suo insieme di definizione,

- (a) ha un asintoto obliquo
- (c) ha massimo assoluto

- (b) non è limitata inferiormente
- (d) ha minimo assoluto

Soluzione:

$$f(x) = \frac{\sin x \cos(x^2)}{x^2}$$

$f$  non è definita in  $x=0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \cos(x^2) \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{0^-} = -\infty$$

quindi  $f$  non è limitata inferiormente.

3. La funzione  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $F(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{t}(t-2) dt$

(a) ha 3 punti di flesso

(c) è concava

► (b) ha 2 punti di flesso

(d) è convessa

*Soluzione:*

$$F(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{t-2} dt$$

Utilizziamo la formula di derivazione per integrali  
con estremi variabili ottenendo

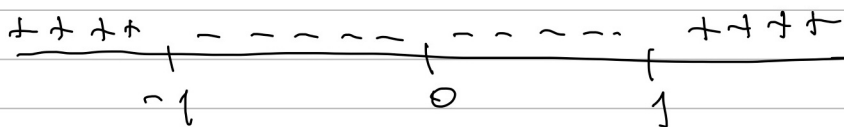
$$F'(x) = 2x \sqrt{x^2-2} (x^2-2) = 2x|x|(x^2-2) =$$

$$= \begin{cases} 2x^2(x^2-2) = 2x^4 - 4x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -2x^2(x^2-2) = -2x^4 + 4x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$F''(x) = \begin{cases} 8x^3 - 8x = 8x(x^2-1) & \text{se } x \geq 0 \\ -8x^3 + 8x = -8x(x^2-1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Poiché  $\lim_{x \rightarrow 0} F''(x) = 0$ , otteniamo che  $F''(0) = 0$ .

Dato che  $(x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$  oppure  $x \leq -1$   
il segno di  $F''(x)$  è il seguente



Ne segue che  $x = 1$  e  $x = -1$  sono punti  
di flesso per  $F$ .

4. Sia  $F(x)$  la primitiva della funzione  $f(x) = \frac{\sin^2 x \cos x}{e + \sin^3 x}$  tale che  $F(0) = \frac{4}{3}$ . Allora  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

- (a)  $\frac{\log(e+1)+3}{3}$  (b)  $\frac{1}{3}$  (c) 1 (d)  $\frac{\log(e+1)}{3}$

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva di  $f(x)$  con la sostituzione

$$\sin x = t, \quad \frac{dt}{dx} = \cos x, \quad \cos x dx = dt$$

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{e + \sin^3 x} dx = \int \frac{t^2}{e + t^3} dt$$

e seguiamo ora la sostituzione  $t^3 = y, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2$

$$\frac{dy}{3} = t^2 dt$$

$$\int \frac{t^2}{e + t^3} dt = \int \frac{1}{e + y} \frac{dy}{3} = \frac{1}{3} \log|e + y| + c =$$

$$= \frac{1}{3} \log|e + t^3| + c = \frac{1}{3} \log|e + \sin^3 x| + c$$

$$\text{Quindi } F(x) = \frac{1}{3} \log|e + \sin^3 x| + c$$

Imponendo la condizione  $F(0) = \frac{4}{3}$  ricaviamo  $c$

$$\frac{1}{3} \log|e + \sin^3 0| + c = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log|e + 0| + c = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{4}{3} - \frac{\log e}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \log|e + \sin^3 x| + 1$$

quindi

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} \log|e + \sin^3 \frac{\pi}{2}| + 1 = \frac{1}{3} \log|e + 1^3| + 1 =$$

$$= \frac{\log(e+1) + 3}{3}$$

5.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \pi)}{\cos^3 x} dx$

(a) non esiste

(b) diverge positivamente (c) converge

► (d) diverge negativamente

Soluzione:

Osserviamo che

$$\cos(x+\pi) = \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi = -\cos x$$

$$\text{Quindi} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\cos x}{\cos^3 x} dx = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

La funzione integranda è pari, quindi consideriamo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pi/2^-} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pi/2^-} \left[ \tan x \right]_0^{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow \pi/2^-} \tan \varepsilon = +\infty$$

$$\text{Quindi} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\infty$$

$$\text{Per simmetria anche} \quad \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos(x+\pi)}{\cos^3 x} dx = -\infty$$

L'integrale quindi diverge negativamente.

6.  $\int_2^{+\infty} \frac{x \log x}{1 + \log^2 x} dx$

(a) non esiste

► (b) diverge a  $+\infty$

(c) diverge a  $-\infty$

(d) converge

Soluzione:

Poniamo  $f(x) = \frac{x \log x}{1 + \log^2 x}$  e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log x}{1 + \log^2 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log x \left( \frac{1}{\log^2 x} + 1 \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\log^2 x} + 1} = \infty \cdot 1 = \infty$$

per gerarchia di infiniti.

Ne segue che  $\int_8^{\infty} f(x) dx$  diverge positivamente.

7.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(2n)!}} =$

(a)  $\frac{e}{2}$

(b) 0

(c)  $+\infty$

► (d)  $\frac{e^2}{4}$

Soluzione:

Poniamo  $a_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!}$  e ricordiamo che se  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  allora anche  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

(la successione  $a_n$  è a termini positivi).

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n}} = \frac{(n+1)^{2n}}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^{2n}} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{n+1}{2(2n+1)} \end{aligned}$$

Poiché  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4}$

otteniamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^2}{4}$ , quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{e^2}{4}.$$

8. La serie  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{2n-1}{2n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right)$

- (a) diverge negativamente
- (b) converge ma non converge assolutamente
- (c) converge assolutamente
- (d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo  $a_n = \frac{2n-1}{2n} - \sqrt{\frac{n-1}{n}}$  e osserviamo che

$$a_n = 1 - \frac{1}{2n} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \left(-\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2n}} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{8} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \left(-\frac{1}{8} + o(1)\right)$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Taylor

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + o(t^2) \quad \text{con } \alpha = \frac{1}{2}, t = -\frac{1}{n}$$

Scegliamo ora  $b_n = \frac{1}{n^2}$  e otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{8} \quad \text{quindi, per il criterio del}$$

confronto asintotico,  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  converge, quindi

$\sum_{n \geq 1} a_n$  converge assolutamente.

9.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{x \arctan x}{x^4 + y^2} =$

(a)  $+\infty$

(b) 0

► (c) non esiste

(d)  $\frac{\pi}{2}$

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{x \arctan x}{x^4 + y^2}$$

Consideriamo la restrizione di  $f$  all'asse  $y$

$$h(y) = f(0,y) = \frac{0 \cdot \arctan 0}{0 + y^2} = 0 \quad \forall y \neq 0$$

quindi  $\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 0$

Consideriamo ora la restrizione di  $f$  all'asse  $x$

$$g(x) = f(x,0) = \frac{x \arctan x}{x^4 + 0} \quad \text{ove } x \neq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (x + o(x^2))}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + o(x))}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(x)}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

quindi non esiste  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ .

10. Sia  $f(x,y) = y \sin x$ . In quali dei seguenti insiemi il gradiente di  $f$  non si annulla mai?

► (a)  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > 1\}$

(b)  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

(c)  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$

(d)  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$

Soluzione:

$$f(x,y) = y \sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x.$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Dalla seconda equazione otteniamo } x = n\pi, n \in \mathbb{Z}. \\ \text{Sostituendo nella prima otteniamo} \end{array}$$

$y \cos(n\pi) = 0 \Leftrightarrow y(-1)^n = 0 \Leftrightarrow y = 0$ . Quindi i punti dove si annulla il gradiente sono tutti e soli i punti  $(n\pi, 0), n \in \mathbb{Z}$  che sono tutti sull'asse  $x$ .

È immediato verificare che l'insieme che non contiene tali punti è  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > 1\}$ .